



**Universidad**  
Zaragoza

# Trabajo Fin de Grado

Modelado y control de un levitador magnético

Autor

Fco. Javier de la Pascua Rubio

Directores

Antonio Romeo Tello

Jesús Letosa Fleta

Universidad de Zaragoza / Escuela de Ingeniería y  
Arquitectura 2016



Escuela de  
Ingeniería y Arquitectura  
Universidad Zaragoza

## DECLARACIÓN DE AUTORÍA Y ORIGINALIDAD

(Este documento debe acompañar al Trabajo Fin de Grado (TFG)/Trabajo Fin de Máster (TFM) cuando sea depositado para su evaluación).

D./D<sup>a</sup>. Francisco Javier de la Pascua Rubio,

con nº de DNI 77.216.982-W en aplicación de lo dispuesto en el art.

14 (Derechos de autor) del Acuerdo de 11 de septiembre de 2014, del Consejo

de Gobierno, por el que se aprueba el Reglamento de los TFG y TFM de la

Universidad de Zaragoza,

Declaro que el presente Trabajo de Fin de (Grado/Máster)

Grado \_\_\_\_\_, (Título del Trabajo)

Modelado y Control de un levitador magnético.

es de mi autoría y es original, no habiéndose utilizado fuente sin ser citada  
debidamente.

Zaragoza, 25 de Noviembre de 2016

Fdo: Francisco Javier de la Pascua Rubio

## Índice

1. Modelo Matemático del sistema.....	6
1.1 Introducción.....	6
1.2 Representación matricial en el espacio de estados .....	10
2. Identificación experimental de las constantes del modelo .....	12
2.1 Obtención del rango del sensor Hall .....	12
2.2 Obtención de las constantes de la planta.....	14
2.2.1 Comparación de resultados usando FEMM .....	16
2.3 Obtención de la constante de la bola de neodimio .....	18
2.4 Caracterización de la bobina .....	20
2.4.1 Cálculo de constantes eléctricas .....	20
2.4.2 Circuito equivalente de la bobina .....	22
2.5 Función de transferencia de la planta .....	27
3. Diseño del controlador .....	29
3.1 Análisis del sistema .....	29
3.1.1 Diseño Regulador Adelanto de Fase con prealimentación de consigna.....	29
3.2 Diseño mediante LDR .....	30
3.3 Diseño mediante análisis frecuencial.....	32
4. Implementación del controlador .....	36
4.1 Regulador Adelanto de Fase .....	36
4.2 Regulador PID.....	39
5. Conclusiones y líneas futuras .....	43
5.1 Conclusiones.....	43
5.2 Líneas futuras.....	44
6. Referencias .....	44

## Índice de figuras

1. Esquema del levitador.....	6
2. Zona Lineal V-G e identificación de patillas Sensor HALL.....	12
3. Acceso rápido Sensor HALL .....	12
4. Montaje rango Sensor HALL .....	13
5. Tabla distancia-tensión Rango Sensor HALL .....	13
6. Gráfica distancia-tensión Rango Sensor HALL .....	14
7. Tabla datos cálculo a .....	15
8. Tabla datos cálculo b .....	15
9. Planta simulada en FEMM .....	16
10. Tabla datos Simulación FEMM .....	16
11. Simulación Intensidad campo magnético .....	17
12. Densidad de flujo magnético Simulación FEMM .....	18
13. Montaje láminas para cálculo de C .....	18
14. Instrumentos para peso para cálculo de C .....	19
15. Tabla distancia-peso para cálculo de C .....	19
16. Gráfica distancia-peso para cálculo de C .....	19
17. Datos técnicos para cálculo de resistencia en L.....	20
18. Tensión en bobina 19. Corriente en bobina.....	21
20 Criterios Régimen Permanente .....	21
21. Representación efectos parásitos .....	22
22. Datos Analizador de Impedancias.....	23
23. Esquema Circuito Equivalente Bobina .....	23
24. Diagrama de bode Sin bola.....	24
25. Diagrama de Bode Bola pegada .....	24
26. Diagrama de bode Bola en equilibrio .....	24
27. Módulo Diagrama Bode Sin Bola .....	25
28. Módulo Diagrama Bode Con Bola en equilibrio .....	25
29. Gráfica comparativa con ferrita .....	26
30. Esquema para cálculo capacidad en C .....	26
31. Diagrama de bloques del sistema .....	29
32. Diagrama de bloques para regulador PAF + prealimentación de consigna .....	29
33. Bode y LDR de la planta .....	30
34. Bode, LDR y respuesta al escalón con controlador PAF mediante lugar de las raíces.....	32
35. Gráficas para cálculo del controlador .....	33
36. Bode, LDR y respuesta al escalón mediante cálculo métodos frecuenciales .....	35
37. Generación de Señal Triangular .....	36
38. Diagrama de Bode. Cálculo ft .....	37
39. Regulador Adelanto de fase + Prealimentación de consigna .....	37
40. Respuesta al escalón de regulador PID calculado mediante imposición de polos. 40	
41. Tiempo de respuesta, LDR y Bode del PID .....	41
42. Diseño completo del circuito controlador .....	41

Este proyecto combina conocimientos que permiten profundizar en la ingeniería de control así como en la eléctrica para poder estudiar una planta de levitación magnética construida por personal del Departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Zaragoza.

## **INTRODUCCIÓN**

El fenómeno de la levitación magnética se fundamenta en mantener objetos suspendidos sin haber ningún tipo de contacto mecánico debido a la fuerza magnética. Este proceso es por naturaleza inestable y no lineal, convirtiéndose el control de estos sistemas en algo especialmente difícil.

El principal interés su uso en ingeniería aplicada reside en que son sistemas sin contacto, por lo que no precisan de lubricantes para disminuir efectos de fricción además de un desgaste mínimo de las piezas siendo su coste de mantenimiento mucho menor.

Estas ventajas hacen de esta tecnología la ideal para trabajar en entornos industriales en los que son necesarias atmósferas libres de polución siendo algunos ejemplos de su utilización la levitación de objetos en túneles de viento, rodamientos magnéticos y sistemas de aislamiento de vibraciones, además de la más famosa de sus aplicaciones, la suspensión de trenes de levitación magnética.

## **OBJETIVOS**

Los principales objetivos se abordarán en este trabajo serán la caracterización del levitador magnético a partir de las ecuaciones que modelan su comportamiento dinámico así como la identificación experimental de los parámetros que intervienen en dichas ecuaciones.

Además se procederá a diseñar un controlador sencillo que estabilice la planta dada su naturaleza inestable y su posterior implementación.

Para su consecución la metodología consistirá en la realización de ensayos orientados a la identificación de los parámetros nombrados anteriormente con ayuda de cierta instrumentación externa.

También se compararán los resultados con las simulaciones realizadas mediante el software FEMM, que permite entre otras funciones, obtener y representar el campo magnético generado en el levitador, así como el uso generalizado de *Matlab* y especialmente de su herramienta *SISOTOOL* que servirá de apoyo al diseño del controlador.

# 1. Modelo Matemático del sistema

## 1.1 Introducción

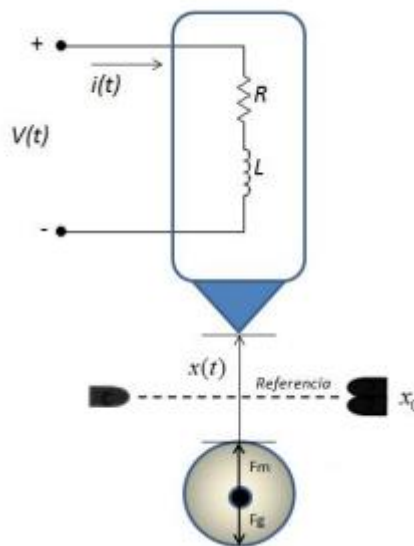
En esta parte de la memoria se realiza el análisis matemático que describe el comportamiento del sistema de levitación magnética. Aquí se comprobará que es un sistema no lineal e inestable, por lo que se realizará la linealización alrededor de un punto de equilibrio.

La levitación consiste en mantener un objeto suspendido en el aire sin existir ningún tipo de contacto mecánico. En el caso de la levitación magnética, la fuerza electromagnética es la que permite dicha suspensión.

La fuerza electromagnética es generada por una bobina conectada a una fuente de potencia, pero para los cálculos en el caso que nos ocupa se deberá tener en cuenta el objeto a levitar, ya que se trata de un imán esférico, que posee su propio campo magnético.

La corriente que circule por la bobina hace que se genere un campo magnético cuya fuerza deberá compensar el peso de la bola (y su campo magnético propio) para mantenerla en una posición estable.

Se obtendrán las ecuaciones matemáticas que rigen este proceso aplicando leyes fundamentales y principios básicos de mecánica y electromagnetismo.



1. Esquema del levitador

Como punto de partida para el modelado, las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento del sistema, se obtienen de la aplicación de la ley de voltajes de Kirchhoff y la segunda ley de Newton, por lo que el sistema queda representado de la siguiente manera:

$$m \cdot g + F_m = m \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

$$V(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

Siendo  $i(t)$  la corriente del circuito,  $x(t)$  el desplazamiento de la bola medida desde el final de la bobina,  $V(t)$  es el voltaje de entrada del sistema,  $L$  es el valor de la inductancia del electroimán,  $m$  la masa de la esfera y  $g$  la constante gravitacional.

Se asume que la fuerza electromagnética  $F_m$  de atracción ejercida por la bobina sobre el objeto, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia  $x(t)$  a la que se encuentra y directamente proporcional al cuadrado de la corriente  $i(t)$ . La salida se obtiene a través de un sensor Hall mediante el cual se puede medir la posición de la esfera suspendida en el aire.

Abordemos primeramente el cálculo de la fuerza magnética, contemplando dos casos diferentes:

- El objeto a levitar es una bola de material ferromagnético.
- El objeto a levitar es un imán de neodimio con forma de bola.

Con independencia del caso a abordar, la fuerza magnética es la fuerza generada por el campo magnético sobre un dipolo magnético. En la fuerza electromagnética este campo magnético está generado por el paso de una corriente eléctrica a través de un conductor.

Sabemos que la energía que se almacena en un campo magnético es:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_v B \cdot H dv$$

Siendo  $H$  el valor del campo magnético y  $B$  el valor de la inducción magnética.

El valor de la fuerza electromagnética se calcula mediante el gradiente de la energía magnética.

$$\vec{f}_m = \nabla W_m = \left( \frac{\partial W_m}{\partial x}, \frac{\partial W_m}{\partial y}, \frac{\partial W_m}{\partial z} \right)$$

En el supuesto de que el objeto que se pretende levitar sea de naturaleza ferromagnética, la distancia a la que se encuentre determinará una mayor o menor reluctancia en el circuito magnético, lo que dará lugar a cambios en la autoinducción. Reescribiendo la ecuación de la energía magnética en función de la inductancia  $L$  y de la corriente que circula por el inductor:

$$W_m = \frac{1}{2} L \cdot i^2$$

Una aproximación típica para el valor de la inductancia es asumir que ésta varía inversamente con respecto a la posición  $x$  de la bola:

$$L(x) = L_{NB} + L_o \frac{x_o}{x}$$

Donde  $L_{NB}$  representa la inductancia cuando no está presente la bola. Como para el estudio de nuestro levitador sólo tenemos un grado de libertad ( $x$ ):

$$\vec{f}_m = -\frac{1}{2}i^2 \cdot L_o \cdot x_o \cdot x^{-2} = -\frac{L_o \cdot x_o}{2} \cdot \frac{i^2}{x^2}$$

Para el caso de que el objeto a levitar sea un imán, la fuerza magnética que actúa sobre el sistema no proviene únicamente de la aportada por la bobina sino que también contribuirá el imán de apoyo, es decir:

$$F_m = F_{m1} + F_{m2}$$

Donde  $F_{m1}$  corresponde a la fuerza magnética en la bobina y  $F_{m2}$  a la que proviene de la bola.

Siendo su valor:

$$F_{m1} = \nabla W_m = \frac{dW_m}{dx} = \frac{1}{2} \cdot i^2 \cdot \frac{dL(x)}{dx} = -\frac{L_o \cdot x_o}{2} \cdot \frac{i^2}{x^2}$$

$$F_{m2} = -\frac{C}{x^2}$$

De modo que la ecuación que obtenemos para la fuerza magnética total es:

$$F_m = \frac{-L_o \cdot x_o}{2} \cdot \frac{i^2}{x^2} - \frac{C}{x^2}$$

Como puede observarse, es una expresión no lineal, por lo que habrá que linealizarla asumiendo un punto de trabajo. Si linealizamos la ecuación procedente de las ecuaciones de movimiento, en torno al punto de equilibrio, obtenemos:

$$\begin{aligned} F_m - F_o &= \frac{\partial F_m(i, x)}{\partial i} \Big|_{eq} \cdot (i - i_o) + \frac{\partial F_m(i, x)}{\partial x} \Big|_{eq} \cdot (x - x_o) \\ \frac{\partial F_m(i, x)}{\partial i} \Big|_{eq} &= \frac{-L_o \cdot x_o}{2 \cdot x_o^2} \cdot 2 \cdot i_o = \frac{-L_o \cdot i_o}{x_o} \\ \frac{\partial F_m(i, x)}{\partial x} \Big|_{eq} &= \frac{-L_o \cdot x_o}{2} \cdot i_o^2 \cdot (-2) \cdot x^{-3} = \frac{L_o \cdot i_o^2}{x_o^2} + \frac{2 \cdot C}{x_o^3} \end{aligned}$$

*Simplificando:*

$$\begin{aligned} \left( \frac{L_o \cdot i_o^2}{x_o^2} + \frac{2 \cdot C}{x_o^3} \right) \cdot \Delta x - \frac{L_o \cdot i_o}{x_o} \cdot \Delta i &= m \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \\ \frac{\Delta X(s)}{\Delta I(s)} &= \frac{\frac{-L_o \cdot i_o}{m \cdot x_o}}{s^2 - \left( \frac{L_o \cdot i_o^2}{m \cdot x_o^2} - \frac{2 \cdot C}{m \cdot x_o^3} \right)} \end{aligned}$$

Siendo ésta última parte de la función de transferencia, que relaciona la posición del objeto con la corriente que circula por la bobina.



En equilibrio:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

$$\frac{L_o \cdot x_o}{2} \cdot \frac{i^2}{x^2} - \frac{C}{x^2} = mg \rightarrow \frac{L_o \cdot i_o^2}{2 \cdot x_o} - \frac{C}{x_o^2} = mg$$

A partir de esta expresión obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{L_o \cdot i_o^2}{m \cdot x_o^2} - \frac{2 \cdot C}{m \cdot x_o^3} &= \frac{2 \cdot g}{x_o} \\ \frac{L_o \cdot i_o}{m \cdot x_o} &= \left( \frac{2 \cdot C}{mx_o^2 \cdot i_o} + \frac{2 \cdot g}{i_o} \right) \\ \frac{\Delta X(s)}{\Delta I(s)} &= \frac{-\left( \frac{2 \cdot C}{mx_o^2 \cdot i_o} + \frac{2 \cdot g}{i_o} \right)}{s^2 - \frac{2 \cdot g}{x_o}} \end{aligned}$$

Todavía queda la inclusión de un polo adicional que proviene de la parte eléctrica en la que hemos obviado la dependencia de L con respecto de x debido a que las variaciones producidas por la distancia de la bola son mínimas. La expresión final, de tercer orden, tendría la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Delta U(s) &= (R + L \cdot s) \cdot \Delta I(s) \\ \frac{\Delta I(s)}{\Delta U(s)} &= \frac{1}{R + L \cdot s} \\ \frac{\Delta X(s)}{\Delta U(s)} &= \frac{\Delta X(s)}{\Delta I(s)} \cdot \frac{\Delta I(s)}{\Delta U(s)} = \frac{-\left( \frac{2 \cdot C}{mx_o^2 \cdot i_o} + \frac{2 \cdot g}{i_o} \right)}{\left( s^2 - \frac{2 \cdot g}{x_o} \right) \cdot (R + L \cdot s)} \end{aligned}$$

Esto es:

$$\begin{aligned} b \cdot \Delta x - a \cdot \Delta i &= m \cdot \frac{d^2 \Delta x(t)}{dt^2} \\ \frac{\Delta X(s)}{\Delta I(s)} &= \frac{-\frac{a}{m}}{s^2 - \frac{b}{m}} \end{aligned}$$

Por esta razón, la función de transferencia que obtendríamos para el sistema linealizado sería cualitativamente similar a la obtenida:

$$\Delta U(s) = (R + L \cdot s) \cdot \Delta I(s)$$

$$\frac{\Delta I(s)}{\Delta U(s)} = \frac{1}{R + L \cdot s}$$

$$\frac{\Delta X(s)}{\Delta U(s)} = \frac{\Delta X(s)}{\Delta I(s)} \cdot \frac{\Delta I(s)}{\Delta U(s)} = \frac{-\frac{a}{m}}{(s^2 - \frac{b}{m}) \cdot (R + L \cdot s)}$$

## 1.2 Representación matricial en el espacio de estados

Para analizar un sistema con varias entradas que se relacionan entre sí es de utilidad representarlas mediante ecuaciones en el espacio de estados.

Estas ecuaciones describen la dinámica de un sistema mediante la relación entre las variables de entrada, las variables de salida y las variables de estado.

Con el sistema invariante en el tiempo y con las ecuaciones ya linealizadas se puede expresar como:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Donde A es la matriz de estado, B la matriz de entrada, C la matriz de salida y D la matriz de transmisión directa.

El sistema se puede representar en variables de estado, tomando las siguientes variables físicas:

$$x_1 = x(t)$$

$$x_2 = \dot{x}(t)$$

$$x_3 = i(t)$$

Reescribiendo las ecuaciones diferenciales utilizando las ecuaciones de la bola ferromagnética, obtenemos la siguiente representación:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$m \cdot \dot{x}_2 - \left( \frac{L_o \cdot i_o^2}{x_o^2} + \frac{2 \cdot C}{x_o^3} \right) \cdot x_1 + \frac{L_o \cdot i_o}{x_o} \cdot x_3 = 0;$$

$$\dot{x}_3 = \frac{u}{L} - \frac{R}{L} \cdot x_3$$

Quedándose la representación matricial de la siguiente forma

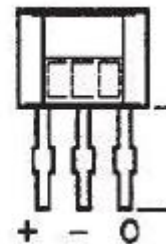
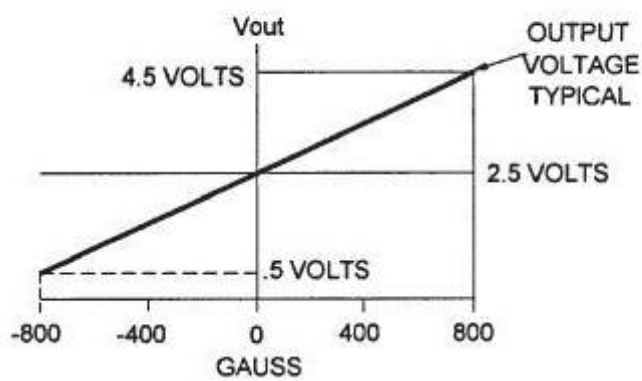
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2 \cdot C}{mx_o^2 \cdot i_o} - \frac{2 \cdot g}{i_o} & 0 & \frac{2 \cdot g}{x_o} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \times u$$

## 2. Identificación experimental de las constantes del modelo

### 2.1 Obtención del rango del sensor Hall

Se ha considerado interesante conocer el rango del sensor Hall para conocer sus limitaciones y poder elegir un punto de equilibrio lo más próximo a la mitad de este rango para evitar cualquier tipo de problema.

**TRANSFER CHARACTERISTICS @  $V_S = 5$  VDC**



### 2. Zona Lineal V-G e identificación de patillas Sensor HALL

En esta imagen podemos ver que el rango de voltaje lineal que ofrece el sensor Hall es de unos 2V y reconoce el sentido del campo magnético.

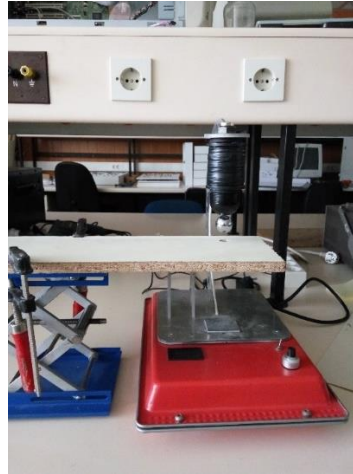
La maqueta del levitador presenta un *jumper* de acceso rápido a los terminales del sensor Hall que utilizaremos para realizar el experimento.



### 3. Acceso rápido Sensor HALL

Alimentamos a 5V cableando a las dos primeras conexiones que corresponden al terminal positivo y al *ground* con ayuda una fuente de alimentación externa de corriente continua.

Mientras vamos probando distintas distancias de la bola a la referencia, medimos con un polímetro la tensión de salida del sensor Hall en la tercera y última conexión (Output en la figura 2).



4. Montaje rango Sensor HALL

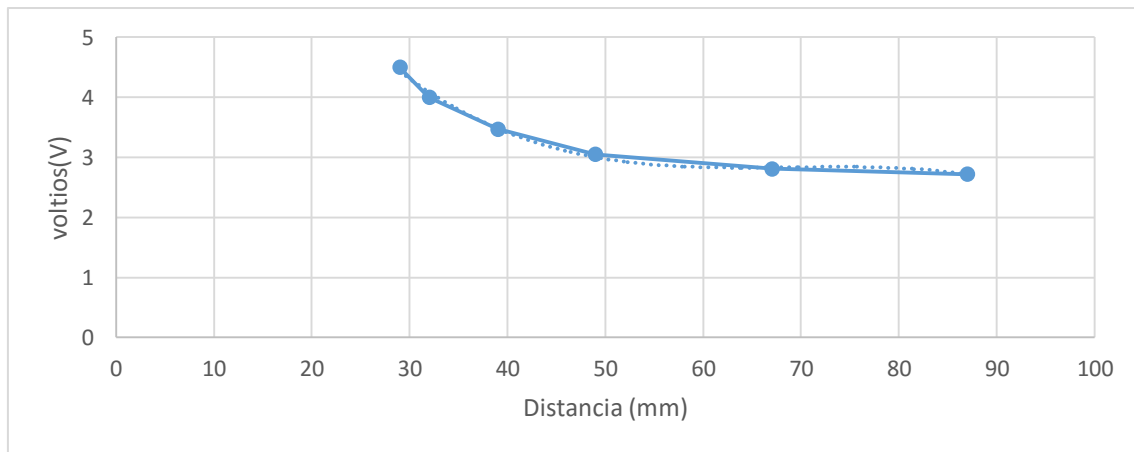
Los resultados de este experimento se reflejan en la siguiente tabla:

Distancia(mm)	Voltios Hall (V)
87	2,72
67	2,81
49	3,05
39	3,47
32	4
29	4,5

5. Tabla distancia-tensión Rango Sensor HALL

Elegimos 39 mm como distancia de equilibrio, ya que se encuentra en el punto medio del rango de salida del sensor Hall ([2,5-4,5] V en sentido positivo).

Si representamos estos datos en una gráfica obtenemos que aunque la relación que une a la intensidad del campo magnético con el voltaje de salida del sensor sea lineal, no lo es con la distancia a la que se encuentra la bola, y por tanto, tampoco lo es con la salida.



6. Gráfica distancia-tensión Rango Sensor HALL

Una vez hemos elegido nuestro punto de equilibrio procedemos a conocer el valor de la corriente que necesita la bobina mantener la bola en ese punto.

También existe un acceso rápido para acceder a la bobina que permitirá medir este valor, que resulta ser de aproximadamente 130 mA.

**$x_o = 0,039 \text{ m}$**

**$i_o = 0,13 \text{ A}$**

## 2.2 Obtención de las constantes de la planta

Después de la linealización en torno al punto de equilibrio concluimos que la fuerza magnética de la bobina es proporcional a la corriente aplicada y a la distancia de la bobina a la bola.

Esto es:

$$\Delta F_m(I, x) \cong a \cdot \Delta I - b \cdot \Delta x$$

Los parámetros los calcularemos a partir dos experimentos en los que fijaremos uno de los dos parámetros anulando así su incremento. Mediremos la otra variable y la fuerza magnética y sólo hará falta despejar.

Para medir las variaciones tomaremos como referencia los valores de equilibrio previamente calculados.

$$(x_o; i_o) = (39 \text{ mm}; 130 \text{ mA})$$

Para calcular  $a$ , mantendremos la posición de la bola fija anulando el incremento de  $x$ . Aumentamos 50 mA la corriente externamente atacando a la bobina y medimos cuanto peso es preciso añadir para que se mantenga en esa misma posición.

Para añadir peso he usado tuercas y arandelas que se pegan a la bola.

Los resultados son los siguientes:

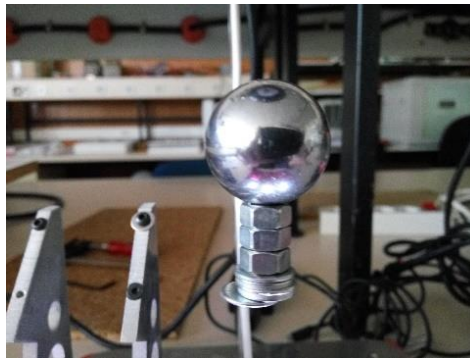
I [mA]	x [mm]	Peso [gr]	F <sub>b</sub> [N]
130	39	70	0,686
180	39	81	0,7938

*7. Tabla datos cálculo a*

Despejando:

$$a = \frac{\Delta F_B}{\Delta I} = \frac{0,7938 - 0,686}{50 \cdot 10^{-3}} = 2,16 \frac{N}{A}$$

Para calcular b, mantendremos la corriente de la bobina fija anulando el incremento de I. Disminuimos 1,5 mm la distancia de la bola y volvemos a medir cuanto peso hace falta añadir para que la corriente no varíe.



Los resultados son los siguientes:

I [mA]	Peso [gr]	F <sub>b</sub> [N]	x [mm]
130	70	0,686	39
130	76	0,7448	38,5

*8. Tabla datos cálculo b*

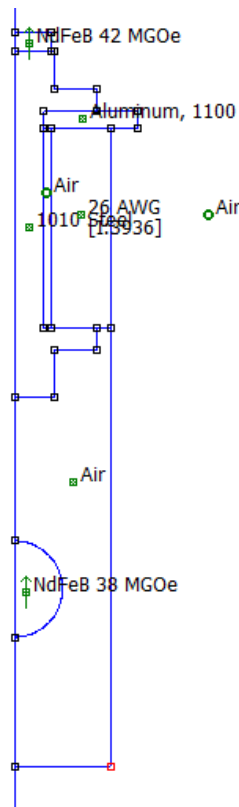
Despejando:

$$b = \frac{\Delta F_B}{\Delta x} = \frac{0,7448 - 0,686}{1,5 \cdot 10^{-3}} = 39,2 \frac{N}{m}$$

### 2.2.1 Comparación de resultados usando FEMM

Estos resultados con los que se pretenden despejar la posición de los polos y la ganancia en la función de transferencia han sido comparados con otros que se han obtenido por medio del software de análisis de elementos finitos, FEMM.

Este programa permite recrear fielmente la maqueta pudiendo definir todas sus partes y las distancias a las que se encuentran entre ellas además de poder elegir todas las propiedades de los materiales que forman parte de ella.



9. Planta simulada en FEMM

Se han simulado los dos anteriores experimentos variando o la distancia de la bola a la bobina o cambiando el valor de la corriente que circula por ella y calculado sus propias a y b, esta vez usando tanto valores superiores como inferiores al punto de equilibrio.

Distancia (mm)	Corriente (mA)	Fuerza (N)
40	130	0,695
41	130	0,659
40	180	0,828
40	80	0,561
39	130	0,735

10. Tabla datos Simulación FEMM



$$a = \frac{\Delta F_B}{\Delta I} = \frac{0,828 - 0,695}{5 \cdot 10^{-3}} = 2,66 \frac{N}{A}$$

$$a2 = \frac{\Delta F_B}{\Delta I} = \frac{0,659 - 0,561}{5 \cdot 10^{-3}} = 1,96 \frac{N}{A}$$

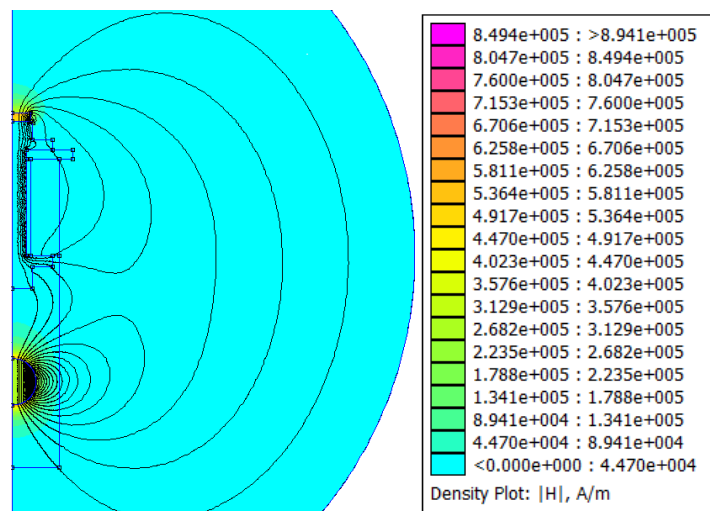
$$b = \frac{\Delta F_B}{\Delta x} = \frac{0,695 - 0,659}{1 \cdot 10^{-3}} = 36 \frac{N}{m}$$

$$b2 = \frac{\Delta F_B}{\Delta x} = \frac{0,735 - 0,659}{2 \cdot 10^{-3}} = 38 \frac{N}{m}$$

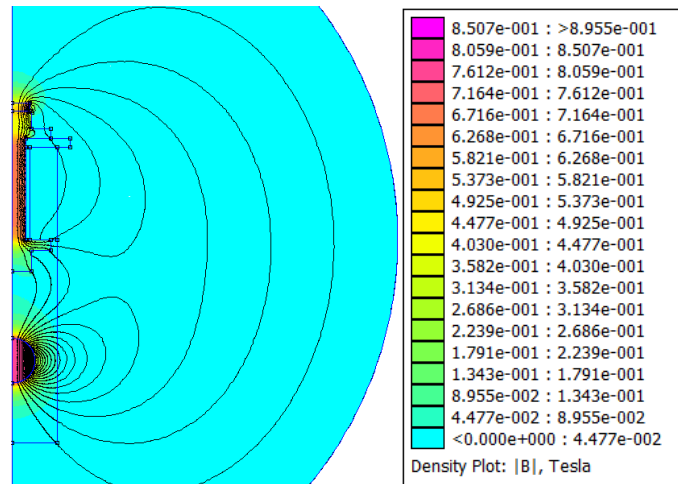
Como se puede observar para la obtención de las constantes en FEMM se han simulado con valores tanto por encima como por debajo del equilibrio, hecho que no se da en el método experimental dado la imposibilidad de quitarle peso a la bola.

Podemos comprobar que los resultados son bastante similares a los originales de 2,16 N/A y 39,2 N/m con un error de aproximado del 10%.

Se ha aprovechado además para representar la intensidad del campo magnético y la densidad de flujo de la planta en la posición de equilibrio y así justificar las dimensiones de la maqueta.



11. Simulación Intensidad campo magnético



12. Densidad de flujo magnético Simulación FEMM

### 2.3 Obtención de la constante de la bola de neodimio

El objetivo de este experimento es la obtención de la constante C del imán para conocer el impacto que tiene sobre la posición de los polos, ya que se encuentra incluida en la constante b.

El primer punto de la gráfica que obtendremos en el experimento será la distancia a la que en ausencia de corriente, el peso de la bola supera al campo magnético que ésta genera, haciendo que caiga.

Para el resto de puntos iremos agrupando varias láminas de cobre de diferentes espesores y fijándolos a nuestra referencia. Para cada espesor distinto en consecuencia hará falta añadir un peso a la bola para vencer el campo magnético.



13. Montaje láminas para cálculo de C

En este caso estos pesos estaban formados por varios trozos de cobre y plomo cortados para grandes medidas y formar un peso base, y arena para realizar una medición más precisa.



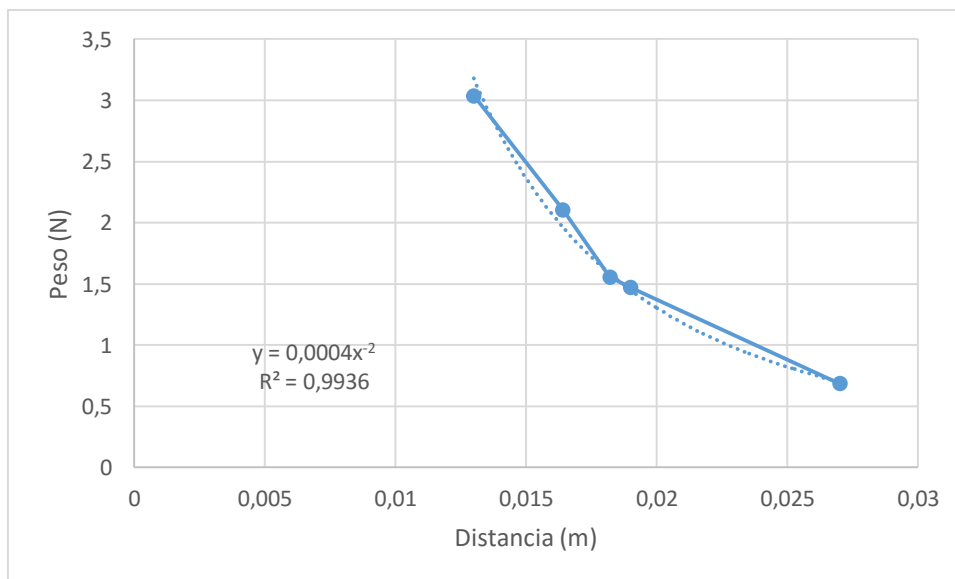
14. Instrumentos para peso para cálculo de C

Éstos son los resultados que se han obtenido:

Distancia (m)	Peso (N)
0,013	3,038
0,0164	2,107
0,0182	1,5582
0,019	1,47
0,027	0,686

15. Tabla distancia-peso para cálculo de C

Si representamos los datos en una gráfica y los ajustamos con una regresión potencial tenemos lo siguiente.



16. Gráfica distancia-peso para cálculo de C

Se obtiene que la constante magnética de la bola es  $0,0004 \text{ Nm}^{-2}$ .

$$C = 0,0004 \text{ Nm}^{-2}$$

## 2.4 Caracterización de la bobina

### 2.4.1 Cálculo de constantes eléctricas

Hasta ahora hemos obtenido el valor de la ganancia y la posición de los dos polos conjugados que describen el funcionamiento del sistema. No obstante es necesario obtener además la posición de un polo adicional que proviene de la parte eléctrica.

Para esto es primordial saber el valor de la inductancia, así como el de la resistencia interna asociada a la misma ya que se trata de una bobina real, no ideal y vamos a tener pérdidas.

El valor de la resistencia se obtiene gracias a los datos proporcionados por la hoja de características de la bobina en el que se indica el valor de resistencia por kilómetro además de la longitud de la misma.



## Technical Library

Dimensions in millimetres of the base copper wire and the finished product with Polyurethane coating

RS Stock No.	Copper Wire Size	Tolerance on Wire Size(+/-)	Enamelled Wire		Resistance ohms/km
			min o.d.	max o.d.	
357-918	0.200	0.003	0.227	0.239	565.50
357-924	0.224	0.003	0.253	0.266	450.90
357-716	0.250	0.004	0.282	0.297	362.00
357-722	0.315	0.004	0.350	0.367	228.00
357-738	0.400	0.005	0.440	0.459	141.40
357-744	0.500	0.005	0.545	0.566	90.48

17. Datos técnicos para cálculo de resistencia en L

La bobina que estamos usando tiene un número de identificación 357-738 cuya longitud total es de 447 metros y una resistencia por kilómetro de  $141.4 \Omega$ .

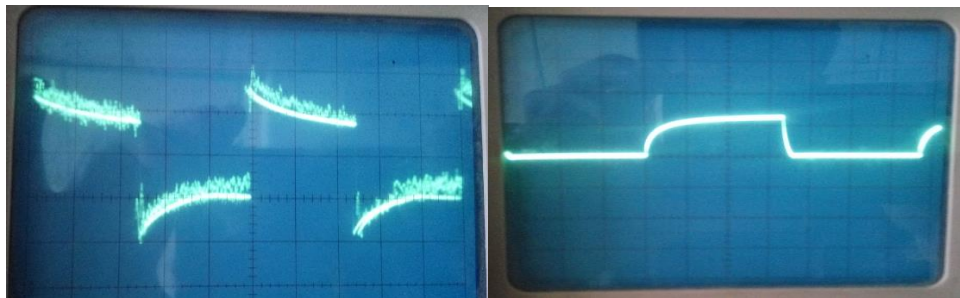
$$141,40 \cdot 0,447 = 63,2058 \Omega$$

$$R=63,2 \Omega$$

Se corroboró el resultado mediante un polímetro obteniendo el mismo resultado.

Para conocer el valor de la inductancia haremos uso de los métodos que tenemos a nuestro alcance. Primero abriremos el circuito implementado y añadiremos una resistencia de 1 k $\Omega$  en serie con la bobina y excitaremos el circuito mediante un generador de señales con una señal cuadrada de 1 voltio de continua con una frecuencia de 10 Hz con un *duty* de 0,5 que simulará la carga y descarga de la bobina.

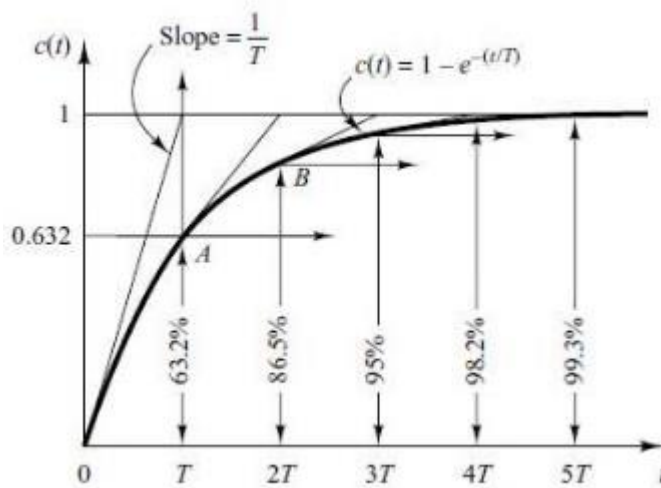
Suponiendo la bobina descargada en su instante inicial y una vez alcanzada la situación de régimen estacionario medimos la tensión en la resistencia, lo que corresponde a la forma de onda de la corriente en la bobina.



18. Tensión en bobina

19. Corriente en bobina

De esta forma concluimos en que el valor de la bobina es de aproximadamente 1'06 Henrios usando el criterio de 3 tau, para considerar cuando se ha llegado al régimen permanente.



20 Criterios Régimen Permanente

**L=1,06 H**

## 2.4.2 Circuito equivalente de la bobina

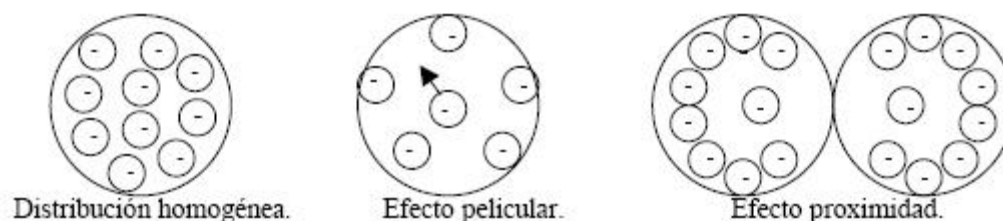
### 2.4.2.1 Experimentos

Con el fin de conocer el comportamiento en frecuencia de la bobina para poder elegir una frecuencia adecuada en el futuro controlador además de averiguar si existen efectos parásitos, previsible dado el gran número de espiras que presenta la bobina usaremos un medidor de impedancias *Wayne Kerr*.

Para comenzar vamos a conocer la variación de la impedancia conforme aumenta la frecuencia, realizando un barrido desde los 20 Hz (mínimo que permite el aparato). Usamos un ajuste de la impedancia a un sistema RL y observamos aparte de cierta disminución del valor de H un aumento exagerado en el valor de la resistencia cuando todavía nos encontrábamos a baja frecuencia (100 Hz), lo cual puede significar que el ajuste no es el correcto y se esté dando un caso de efectos parásitos provocados por proximidad entre espiras o por efecto pelicular.

El primero se debe a que el campo magnético producido en el interior de un conductor por su propia intensidad y por la de los conductores próximos, hace que la densidad de corriente no sea uniforme en la sección del conductor.

El segundo, también conocido como efecto *skin* se debe a la variación del campo magnético cuando el conductor se excita con corriente alterna siendo mayor en el centro provocando mayor densidad en la superficie. Es un efecto apreciable en conductores de grandes secciones o macizos y aumenta con la frecuencia. Ninguna de estas condiciones se asemeja a nuestro caso ya que estamos hablando de una sección de 0,4 milímetros y a frecuencias inferiores a 100 Hz, por lo que podemos descartar este fenómeno.



21. Representación efectos parásitos

Por lo tanto intentaremos explicar los resultados basándonos en la existencia del primer efecto, por proximidad.

Las bobinas se oponen a las variaciones de corriente que circulan a través de ella, fenómeno conocido como inductancia.

Una bobina ideal tiene solamente carácter inductivo, pero una bobina real presenta una resistencia eléctrica propia del alambre conductor y un **efecto capacitivo** por el movimiento de corriente entre las espiras, debido a los materiales utilizados.

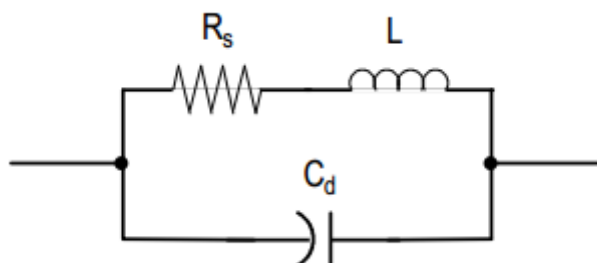
En nuestro caso el dieléctrico es esmalte de poliuretano y al ser demasiado fino no consigue evitar dichas corrientes.

Esta tabla muestra los datos experimentales:

Frecuencia (Hz)	Valor L (H)	Valor R (Ohm)	Impedancia polares
20	1,08	79	158.35 - 60°
25	1,06	87	189.13-62.70°
30	1,04	95	219.2-64.20°
40	1	114	277.2-65.75°
50	0,961	133	331.44-66.4°
60	0,925	152	382.34-66.65°
80	0,868	189	477.8-66.75°
100	0,822	223	566.2-66.8°

22. Datos Analizador de Impedancias

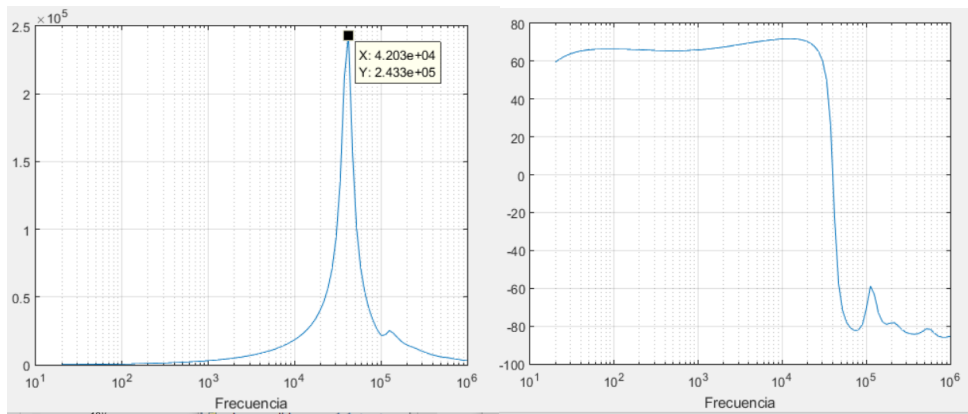
Al imponer el modelo anterior a uno que no le corresponde las medidas son **no válidas**. El *Wayne Kerr* no permite calcular el ajuste al modelo que suponemos el correcto, de modo que usamos un analizador de impedancias distinto, *Agilent E4980* de *HP*, con capacidad para realizar un barrido frecuencial mucho mayor (20Hz-100KHz) que aunque tampoco permitía ajustar al modelo que necesitamos, sí que permite representar los datos en forma de diagrama de bode, observándose un pronunciado pico de resonancia.



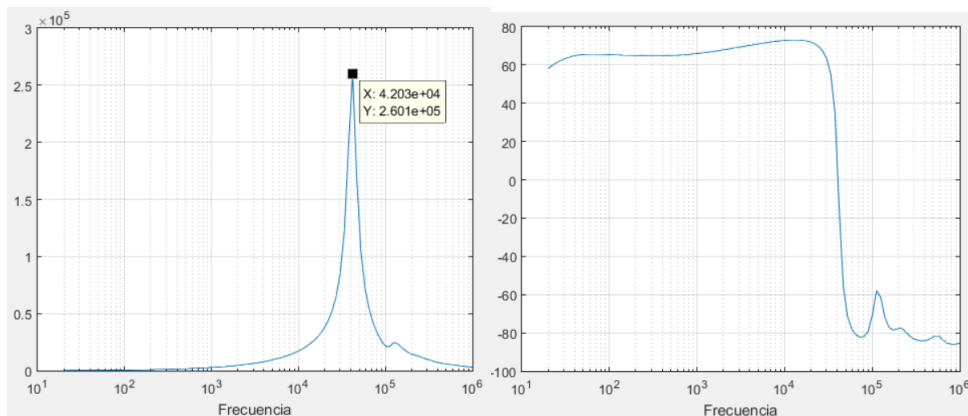
23. Esquema Circuito Equivalente Bobina

Se realizaron las medidas en 3 situaciones distintas que corresponden a medir únicamente la bobina (1) , a la bobina con la bola fijada a su extremo (2) y por último la futura situación real que compete a la bobina con la bola situada a una distancia aproximada a la posición de equilibrio.

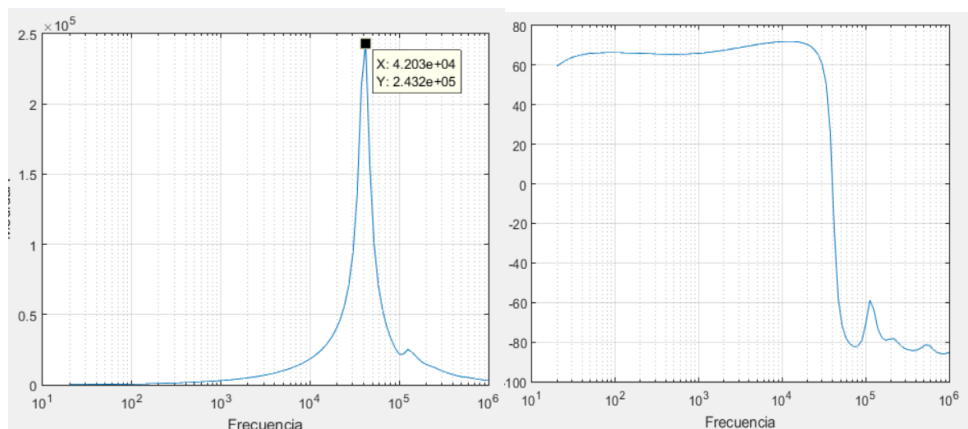
Éstos son los resultados:



24. Diagrama de bode Sin bola



25. Diagrama de Bode Bola pegada

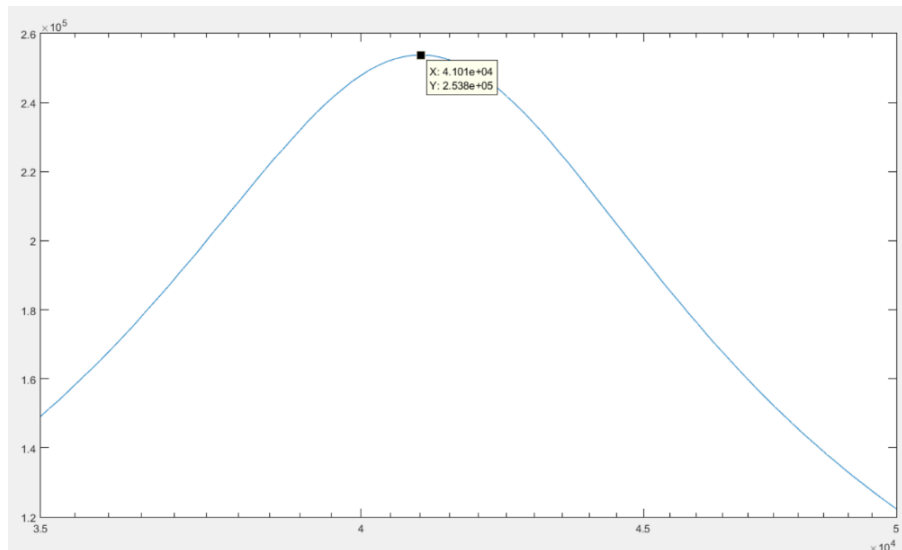


26. Diagrama de bode Bola en equilibrio

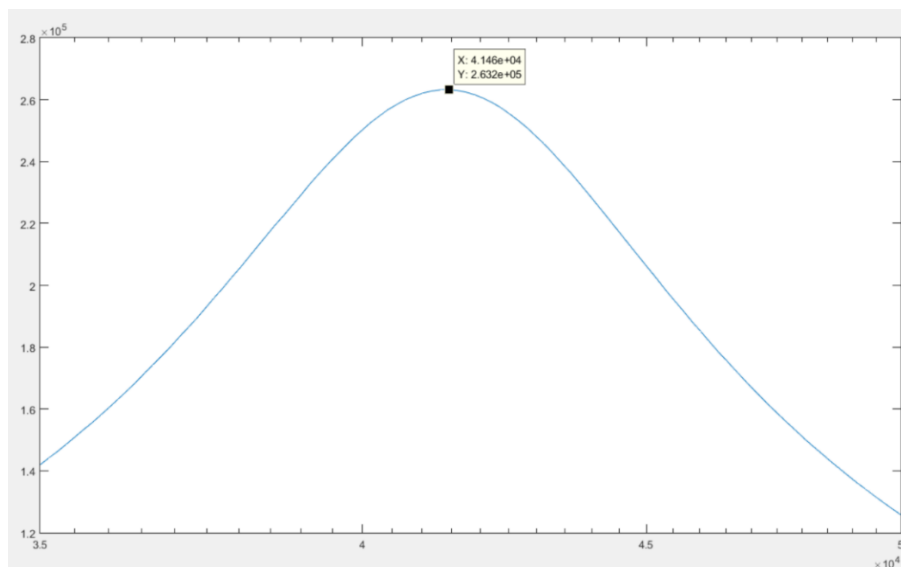
Podemos observar que los valores tanto la gráfica del módulo como la de la fase prácticamente no varían, independientemente de si la bola está presente o no. Realmente se esperaba aunque fuera un mínimo de cambio en la frecuencia a la que se da ese pico de resonancia, que probablemente no se da debido a la granularidad con la que se han realizado los experimentos por lo que se decide repetirlos usando el



mismo número de puntos pero centrados en la zona frecuencial donde se supone que va a ocurrir ese pico de resonancia, que ya hemos localizado en torno a los 40kHz obteniendo los siguientes resultados.



27. Módulo Diagrama Bode Sin Bola

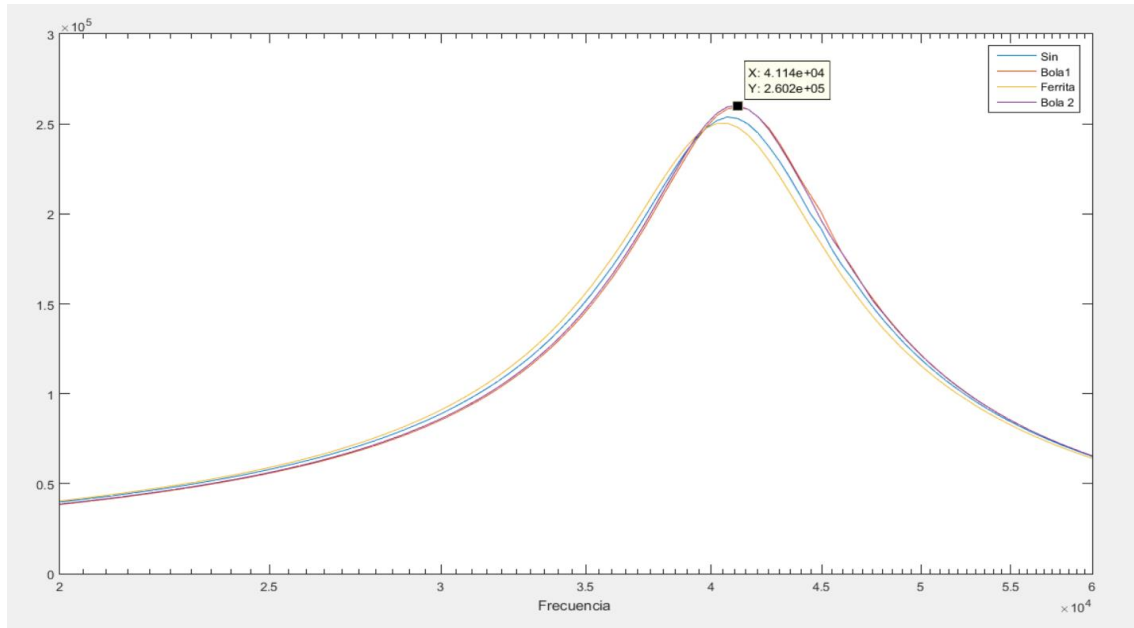


28. Módulo Diagrama Bode Con Bola en equilibrio

Demostramos de esta forma que la variación del valor de la L en función de la distancia es despreciable.

Por otra parte se valora la posibilidad de que los últimos datos recogidos no sean del todo correctos dado que la permeabilidad magnética del material que estamos utilizando como objeto, neodimio, es muy cercana a 1 y al juntarse con la bobina puede modificar el valor total del sistema, ya que en realidad estaríamos trabajando con un “material distinto”.

Por eso volvemos a realizar el experimento y añadimos un caso en el que el material medido es una lámina de ferrita, material ferromagnético con una permeabilidad muy superior a 1. Éstos son los resultados:

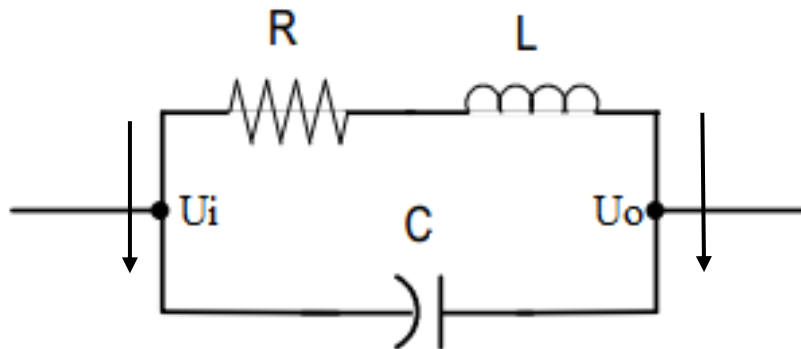


29. Gráfica comparativa con ferrita

Vemos como con la ferrita la gráfica se desplaza levemente hacia la izquierda, mientras que al usar la bola la gráfica se desplaza a la derecha. Esto se debe a que con la ferrita la permeabilidad magnética aumenta por lo tanto la reluctancia disminuye lo que hace que el valor de la inductancia sea mayor y el pico de resonancia se dé antes, mientras que para el caso de la bola de neodimio el proceso es el inverso. Estos cambios en los valores son mínimos por lo que podemos concluir en que el material tampoco es relevante para la respuesta en frecuencia de la bobina.

Como dato final usaremos los 41 kHz a los que se encuentra el pico de resonancia, frecuencia a la que las reactancias de C y L se igualan, gracias al cual podremos calcular el valor de la capacidad.

#### 2.4.2.2 Cálculo de la capacidad



30. Esquema para cálculo capacidad en C

$$H(w) = \frac{U_o}{U_i} = \frac{Z_o}{Z_i} = \frac{\frac{1}{Cj\omega}}{\frac{1}{Cj\omega} + R + Lj\omega} = \frac{1}{1 + RCj\omega - LC\omega^2}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}, \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$2 \cdot \pi \cdot f_c = \sqrt{\frac{1}{1,06 \cdot C}}$$

$$C = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot 41000)^2 \cdot 1,06} = 14,21 \text{ pF}$$

## 2.5 Función de transferencia de la planta

Previamente habíamos conseguido formular la función de transferencia de la planta, obtenemos:

$$b \cdot \Delta x - a \cdot \Delta i = m \cdot \frac{d^2 \Delta x(t)}{dt^2}$$

$$\frac{\Delta X(s)}{\Delta I(s)} = \frac{-\frac{a}{m}}{s^2 - \frac{b}{m}}$$

Ahora sustituimos por los resultados recientemente obtenidos:

$$a = \frac{-L_o \cdot i_o}{x_o}$$

$$b = \frac{L_o \cdot i_o^2}{x_o^2} - \frac{2 \cdot C}{x_o^3}$$

$$\frac{2 \cdot C}{x_o^3} = \frac{2 \cdot 0,0004}{0,039^3} = 13,48$$

$$\frac{\Delta X(s)}{\Delta I(s)} = \frac{30,857}{s^2 - 560} = \frac{-30,857}{(s + 23,37) \cdot (s - 23,37)}$$

Aquí podemos ver que el aporte que representa el hecho de que la bola tenga su propio campo magnético afecta en una medida nada despreciable a la posición de los polos.

Además, si nos fijamos en la posición de los polos, ya se intuye que el sistema en lazo abierto va a ser totalmente inestable, aún a falta de añadir la posición del polo eléctrico, quedando la función completa de la siguiente forma.

$$\Delta U(s) = (R + L \cdot s) \cdot \Delta I(s)$$

$$\frac{\Delta I(s)}{\Delta U(s)} = \frac{1}{R + L \cdot s} = \frac{\frac{1}{L}}{s + \frac{R}{L}} = \frac{0,9434}{s + 59,62}$$

$$\frac{\Delta X(s)}{\Delta U(s)} = \frac{\Delta X(s)}{\Delta I(s)} \cdot \frac{\Delta I(s)}{\Delta U(s)} = \frac{-30.857}{(s + 23,37) \cdot (s - 23,37) \cdot (R + Ls)}$$

$$\frac{\Delta X(s)}{\Delta U(s)} = \frac{-29,11}{(s + 23,37) \cdot (s - 23,37) \cdot (s + 59,62)}$$

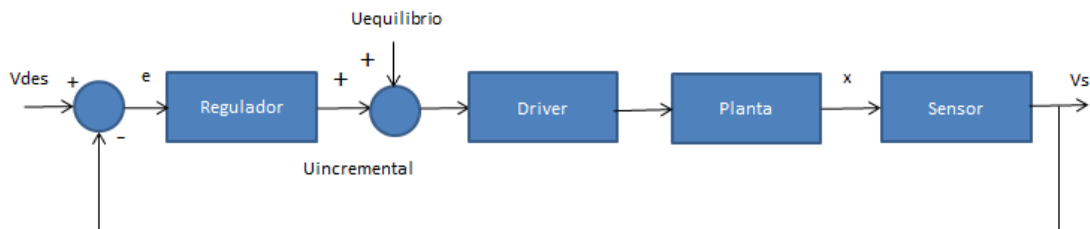
### 3. Diseño del controlador

#### 3.1 Análisis del sistema

La función de transferencia que tenemos identificada hasta ahora es:

$$G(s) = \frac{-29}{(s+23)(s-23)(s+59)}$$

Sin embargo a la hora de diseñar el controlador debemos tener en cuenta la ganancia que incluirá el sensor Hall para obtener la salida del sistema en voltios, además de una ganancia de driver de potencia siendo el diagrama de bloques general que describe el sistema el siguiente.

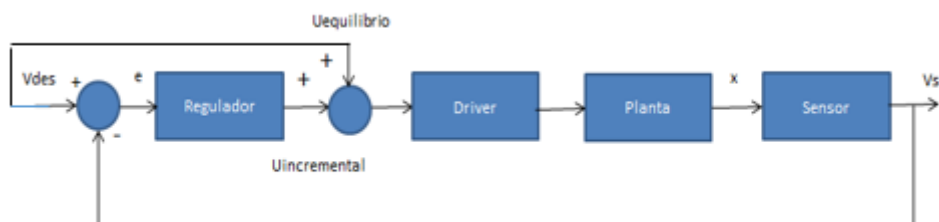


31. Diagrama de bloques del sistema

El valor de la ganancia del sensor Hall lo hallamos interpolando a partir de los datos obtenidos en la figura 5 resultando un valor de  $-55,85V/m$ . Este valor es negativo dado que el voltaje de salida aumenta conforme disminuimos la distancia de la bola. De esta forma la ganancia total de la planta recupera su signo positivo. Además hará falta añadir un valor de ganancia de driver que cambiará dependiendo del diseño del controlador.

Como podemos observar en la figura, la acción que le llega al conjunto driver-planta-sensor es una suma de las dos tensiones  $U_{equilibrio}$  y  $U_{incremental}$ , que será la acción aportada por el regulador.

##### 3.1.1 Diseño Regulador Adelanto de Fase con prealimentación de consigna



32. Diagrama de bloques para regulador PAF + prealimentación de consigna

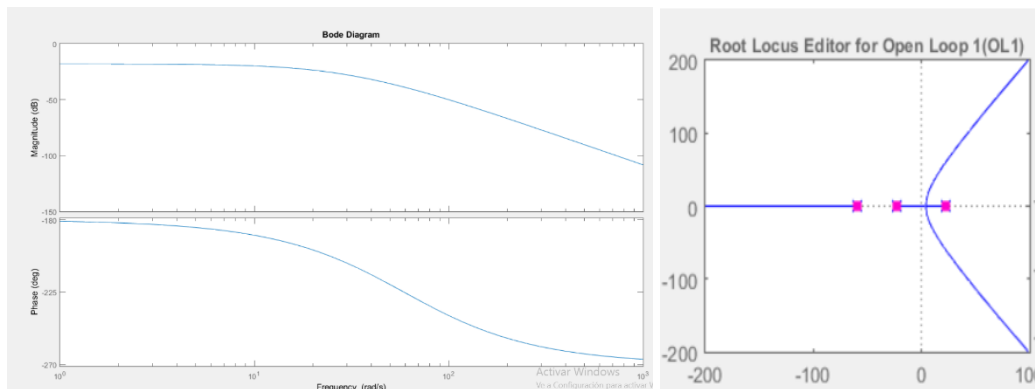
Dado que la acción de control es, en ausencia de error, la prealimentación de la consigna en unidades de sensor Hall, la tensión con la que habrá que alimentar la bobina deberá ser capaz de suministrar los 130mA necesarios para mantener la bola en equilibrio.

Para este primer diseño vamos a intentar simplificar al máximo el circuito. Para ello consideramos obtener  $U_{equilibrio}$  directamente de  $V_{des}$  (referencia en voltios Hall). La implementación del controlador termina imponiendo la tensión de alimentación de la bobina y con ello la ganancia del driver cuyo valor lo hallamos dividiendo el dicho valor de alimentación de la bobina en equilibrio entre el valor de la salida del sensor Hall en equilibrio, esto es 8,21V ( $0,13A \cdot 63.2\Omega$ ) entre 3,47V, obteniendo un valor de 2,36.

De modo que la ganancia total de la función de transferencia para este diseño corresponderá al producto de la ganancia inicial (-29) por la del sensor Hall y por la del driver, resultando:

$$G(s) = \frac{3822}{(s + 23)(s - 23)(s + 59)}$$

Procedemos a representar el diagrama de Bode además del lugar de las raíces.



33. Bode y LDR de la planta

Basta con observar la posición de los polos en el lugar de las raíces para saber que el sistema es inestable al encontrarse uno de ellos a la derecha del eje real, por ello es necesario el diseño de un controlador que lo estabilice.

### 3.2 Diseño mediante LDR

Si miramos de nuevo la figura en la que se muestra el LDR del sistema, fijándonos en las ramas del mismo podemos ver que discurren por el semiplano derecho, de modo que variando la ganancia nunca estabilizaremos el sistema y el regulador proporcional queda descartado.

Si el lugar de las raíces contase con un cero en el semiplano derecho de modo que partiendo de polo inestable su rama finalizara en dicho cero, elevando suficientemente la ganancia se podría llegar a estabilizar el sistema.

Para la elección de la ganancia se intentará buscar un compromiso entre una baja SO y un tiempo de respuesta pequeño atendiendo a la parte imaginaria de los polos dominantes y que éstos estén suficientemente a la izquierda del semiplano.

Sin embargo, este regulador PD tiene algunas desventajas con respecto a otro controlador muy parecido, el regulador adelanto de fase. Éste permite aumentar la ganancia de la función de transferencia de lazo abierto, y también el margen de fase en un rango de frecuencia. El por qué elegir éste regulador y no el derivativo está basado en que la acción derivativa debe estar siempre limitada, ya que podría amplificar perturbaciones no deseadas en la medida final.

Por esto, será necesaria la introducción de un polo adicional lo suficientemente lejos de modo que no comprometa la acción derivativa del cero.

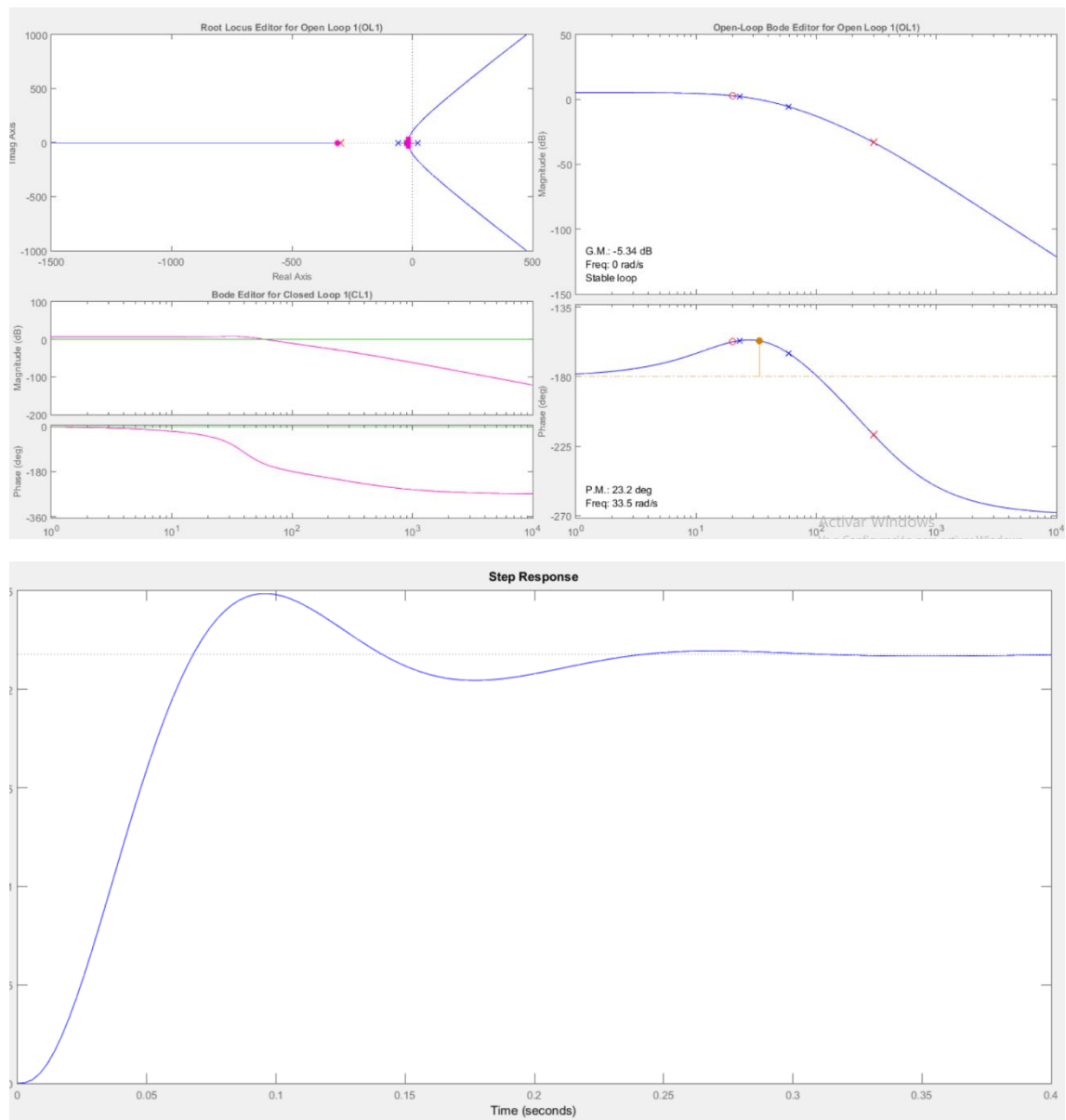
En definitiva estamos hablando de un regulador adelanto de fase cuya estructura es la siguiente:

$$C(s) = K \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}, \text{ siendo } \alpha < 1$$

Al ser  $\alpha$  menor que 1, el polo estará colocado a la izquierda del cero, lo cual dependiendo de este factor hace que el efecto de esta red sobre el sistema en bucle abierto sea parecido al del controlador PD. De hecho este efecto aumentará cuanto mayor sea  $\alpha$ , las acciones serán puras y se incrementará el ruido.

Comenzamos por ejemplo colocando el cero cerca de polo estable dominante, y a su vez colocado a su derecha, para que éste sea el sumidero del polo inestable y a su vez tenga más camino que recorrer en el LDR, en nuestro caso lo colocaremos en -20.

Probaremos a colocar el polo adicional 15 veces más lejos, en -300 y aumentando progresivamente la ganancia analizaremos los resultados del nuevo lugar de las raíces y elegiremos el más propicio.



34. Bode, LDR y respuesta al escalón con controlador PAF mediante lugar de las raíces

$$C(s) = 15 \frac{1 + s/20}{1 + s/300} = 225 \frac{(s + 20)}{(s + 300)}$$

### 3.3 Diseño mediante análisis frecuencial

De nuevo, si nos fijamos en la figura del bode del sistema original observamos que variando únicamente la ganancia no vamos a conseguir estabilizar el sistema, pues sólo vamos a subir o bajar el diagrama de la ganancia y nunca se va a conseguir un margen de fase positivo, por lo que podemos descartar el regulador proporcional.

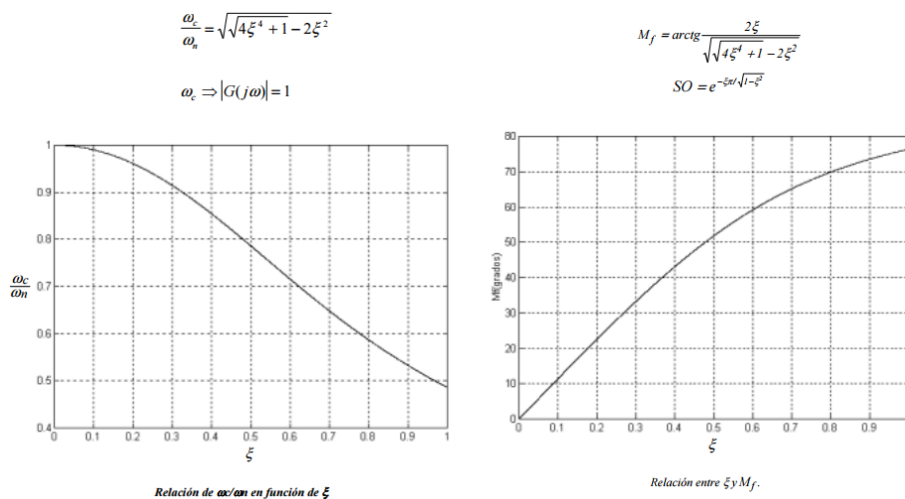


Si añadimos un cero, estaremos ante un regulador proporcional derivativo que puede aportar hasta 90 grados de fase y existe la posibilidad de estabilizar el sistema variando la ganancia.

De nuevo llegamos a que la mejor opción realizable es el diseño de un compensador avance de fase.

Imponiendo un margen de fase mínimo de 30 grados, mediante las gráficas de estabilidad relativa podemos obtener un valor para el factor de amortiguamiento y para la relación de frecuencias de corte y natural.

Hemos de recordar que las gráficas y ecuaciones utilizadas para el cálculo corresponden a un sistema de segundo orden con integrador, por lo que es posible que los resultados no sean del todo exactos, dado que estamos trabajando con un sistema de tercer orden.



35. Gráficas para cálculo del controlador

$$M_f = 30^\circ \rightarrow \xi = 0,27$$

$$\xi = 0,27 \rightarrow \omega_c / \omega_n = 0,95$$

$$t_r = \frac{\pi}{\xi \cdot \omega_n} = 0,3 \rightarrow \omega_n = 38,78 \text{ rad} / s$$

$$\omega_c = 36,84 \text{ rad} / s \approx 37 \text{ rad} / s$$

El regulador avance de fase que vamos a implementar tiene la siguiente estructura.

$$R(s) = K \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}$$

Para  $\omega_c = 37 \text{ rad/s}$  tenemos una fase de -212 grados, por lo que el avance de fase necesitará introducir:

$$\phi_{\max} = M_f^d + M_f^{sist} - 180^\circ$$

$$\phi_{\max} = 30 + 212 - 180 = 62^\circ$$

$$\alpha = \frac{1 - \text{sen}(\phi_{\max})}{1 + \text{sen}(\phi_{\max})} = 0,0621$$

Colocamos el avance de fase en la frecuencia de corte deseada:

$$\omega_c^d = \omega_{\max} = \frac{1}{\tau \sqrt{\alpha}} = 36,84$$

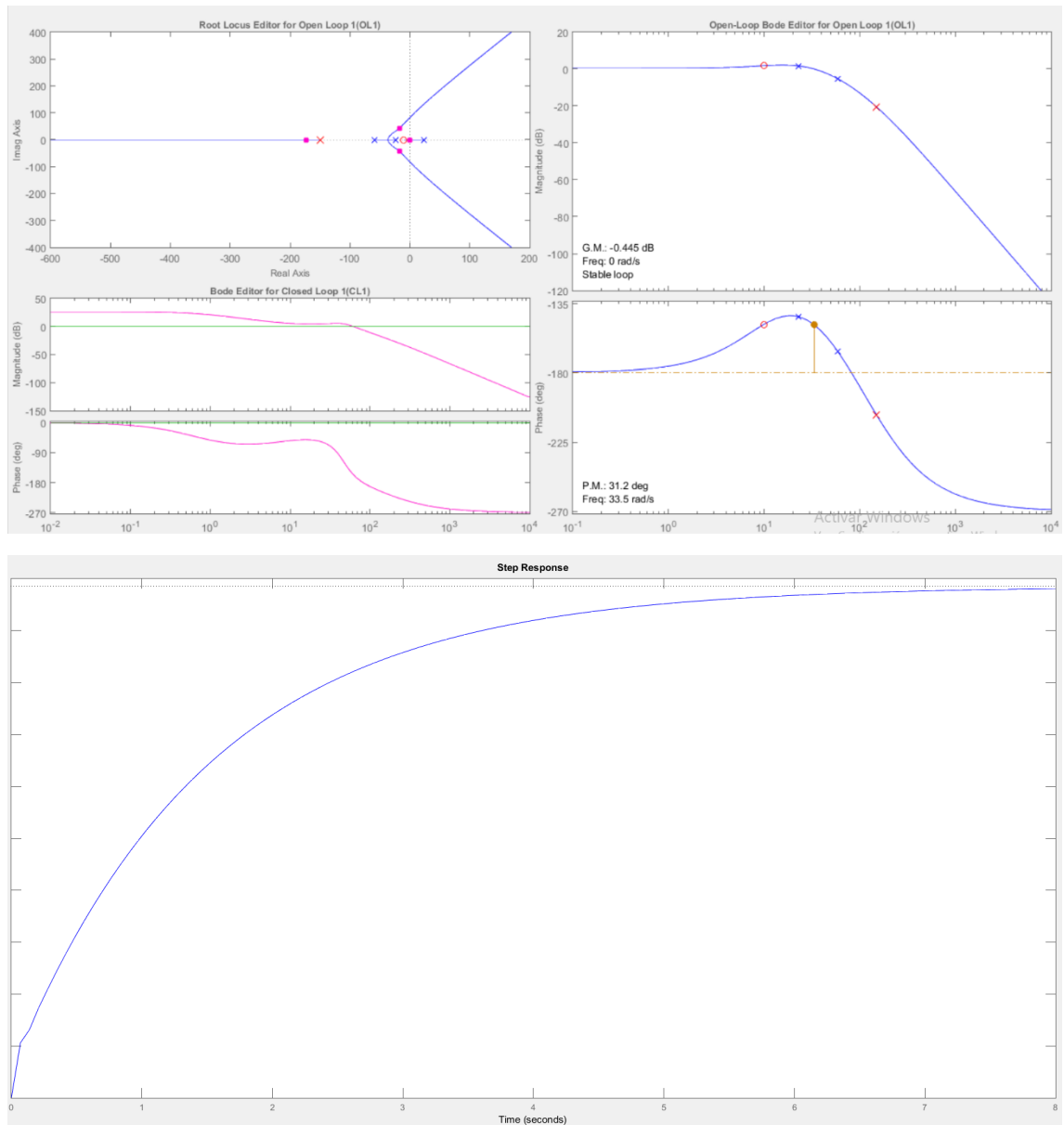
$$\tau = 0,1088$$

$$\alpha \tau = 0,00676$$

Ahora ajustaremos la ganancia:

$$20 \log |RG|_{\omega_c} = -30,7 + 10 \log \frac{1}{\alpha} = 18,43$$

$$20 \log K = 18,43 \rightarrow K = 8,54$$



36. Bode, LDR y respuesta al escalón mediante cálculo métodos frecuenciales

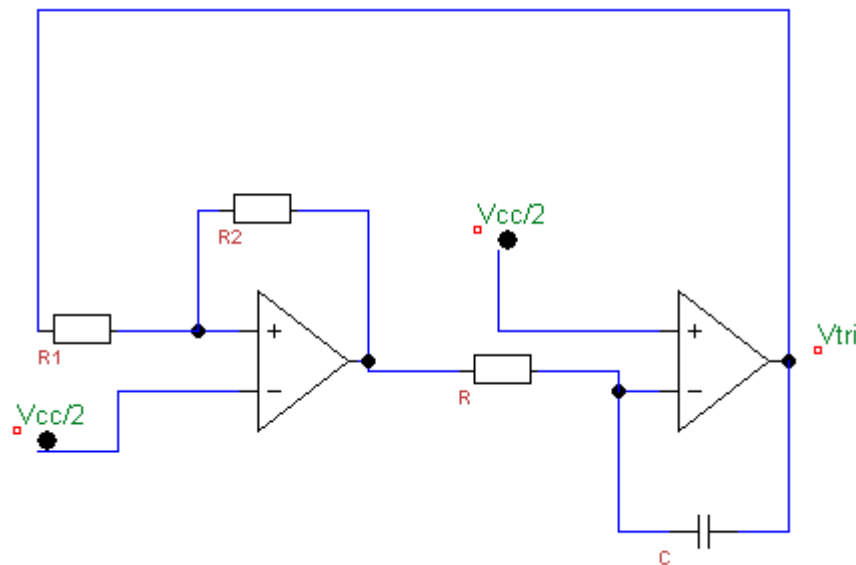
De modo que el compensador queda de la siguiente forma

$$C(s) = 8,54 \frac{1 + 0,1088 \cdot s}{1 + 0,00676 \cdot s} \approx 8,54 \frac{1 + s/10}{1 + s/150} = 128 \frac{(s + 10)}{(s + 150)}$$

## 4. Implementación del controlador

### 4.1 Regulador Adelanto de Fase

Este diseño de implementación consta de dos partes diferenciadas. Primero un generador de señal triangular y en segundo lugar el propio regulador de adelanto de fase con prealimentación de consigna. La salida de ambos se llevará a un amplificador operacional que hará las veces de comparador que atacará directamente a la bobina a través de un MOSFET dando lugar a un control por PWM.



37. Generación de Señal Triangular

Durante esta etapa generaremos una señal triangular de amplitud 0-5V. Tras el primer AO con realimentación positiva que actúa como disparador de Schmitt obtendremos una onda cuadrada que al pasar por el integrador se convertirá en la señal deseada.

$$V_{tri} = \frac{R_1}{R_2} V_{cc}$$

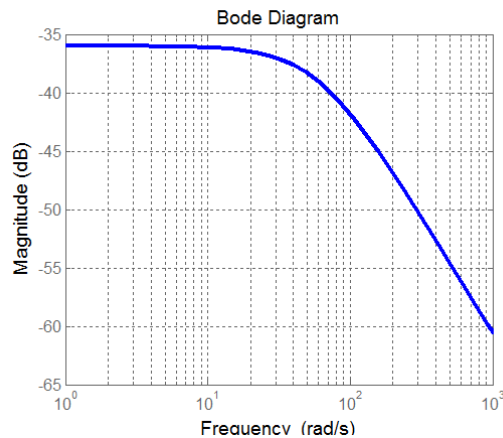
$$R_1 = \frac{V_{tri} \cdot R_2}{V_{cc}}$$

$$f_i = \frac{R_2}{4 \cdot R \cdot R_1 \cdot C}$$

La elección de la frecuencia de la onda triangular vendrá determinada por la frecuencia deseada para la señal PWM con la que se alimentará la bobina. Ésta última será elegida de forma que el rizado de la corriente sea suficientemente bajo. Asumiendo que el circuito eléctrico se comporta como un filtro paso bajo de primer orden:

$$\frac{I(s)}{V(s)} = \frac{\frac{1}{R}}{1 + \frac{L}{R}s} = \frac{0.0158}{1 + 0.0167 \cdot s}$$

Su frecuencia de corte estará en  $L/R=59.62$  rad/s, correspondientes a 9,49Hz. Su diagrama de Bode (módulo) es el siguiente:



38. Diagrama de Bode. Cálculo ft

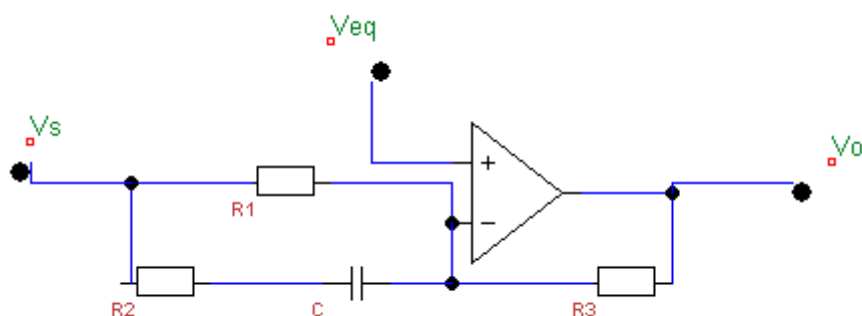
Con el fin de limitar el rizado al 10% del máximo valor de la intensidad para el caso del primer armónico de la señal PWM, se establecerá una frecuencia de conmutación una década por encima de la mencionada frecuencia de corte, esto es, aproximadamente, 100Hz. De esta forma el rizado de intensidad tendrá un primer armónico de aproximadamente 31mA.

Eligiendo 1μF como valor del condensador y resolviendo las ecuaciones anteriores obtenemos los siguientes valores:

$$R = 2,7k\Omega$$

$$R_2 = 15k\Omega$$

$$R_1 = 15k\Omega$$



39. Regulador Adelanto de fase + Prealimentación de consigna

Ahora analizaremos la etapa que corresponde al regulador adelante de fase con prealimentación de consigna.

$$i = \frac{V_s - V_{eq}}{R_1(R_2 + \frac{1}{Cs})} (R_1 + R_2 + \frac{1}{Cs}) = \frac{V_{eq} - V_o}{R_3}$$

Despejando:

$$V_o = V_{eq} + \frac{(V_{eq} - V_s)}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \frac{1}{Cs}} (R_1 + R_2 + \frac{1}{Cs}) \cdot R_3$$

$$V_o = V_{eq} + (V_{eq} - V_s) \frac{1 + \frac{1}{(R_1 + R_2) \cdot C} s^{-1}}{1 + \frac{1}{C \cdot R_2} s^{-1}} \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_2 \cdot R_1}$$

$$V_o = V_{eq} + (V_{eq} - V_s) \frac{s + \frac{1}{(R_1 + R_2) \cdot C}}{s + \frac{1}{C \cdot R_2}} \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_2 \cdot R_1}$$

Si lo comparamos con nuestro regulador:

$$C(s) = 128 \frac{(s+10)}{(s+150)}$$

$$\frac{1}{(R_1 + R_2) \cdot C} = 10$$

$$\frac{1}{C \cdot R_2} = 150$$

$$\frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_2 \cdot R_1} = 128$$

Eligiendo 1μF como valor del condensador y resolviendo las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$R_1 = 100k\Omega$$

$$R_2 = 6k8\Omega$$

$$R_3 = 820k\Omega$$

El hecho de que la implementación del regulador termine imponiendo la tensión de alimentación de la bobina (y con ello, la ganancia del driver) es el principal motivo por el cual se han considerado adicionalmente otras alternativas de implementación que permiten trabajar con tensiones mayores en la bobina, si bien son circuitalmente menos sencillas que la inicialmente presentada.

## 4.2 Regulador PID

Con respecto al diseño anterior y volviendo al esquema de la figura 31 vamos a independizar la tensión de la bobina del valor a la salida del sensor. Nuestro nuevo valor de ganancia del driver va a ser 4, es decir alimentaremos la bobina a 20V, ya que la salida en voltios máxima es 5V.

Con esta modificación el valor de la ganancia en nuestra función de transferencia cambiará con respecto al apartado anterior siendo:

$$G(s) = \frac{6500}{(s+23)(s-23)(s+59)}$$

El objetivo del controlador y del lazo de realimentación es hacer que el error sea nulo.

La estructura del mismo en dominio de s es:

$$V_D = C_P \cdot E + C_I \cdot \frac{E}{s} + C_D \cdot s \cdot E = \left( C_P + \frac{C_I}{s} + C_D \cdot s \right) E = C \cdot E$$

El sistema en bucle cerrado corresponderá a:

$$Gbc = \frac{\Delta V_s}{\Delta V_R} = \frac{CG}{(1 + CG)}$$

Donde C corresponde al controlador PID y G a la función de transferencia de la planta con el valor del driver y del sensor Hall incluidos en su ganancia.

Sustituyendo:

$$Gbc = \frac{\left( K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \right) \cdot \frac{a}{(s^2 - b)(s + c)}}{1 + \left( K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \right) \cdot \frac{a}{(s^2 - b)(s + c)}} = \frac{a \cdot (s^2 K_D + s K_P + K_I)}{s^4 + s^3 c + s^2 (a K_D - b) + s (a K_P - bc) + a K_I}$$

Comparando con la forma estándar para un sistema de segundo orden:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{N(s)}{(s+p)(s+p)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \\ &= \frac{N(s)}{s^4 + (2\zeta\omega_n s + 2p)s^3 + (\omega_n^2 + 4p\zeta\omega_n + p^2)s^2 + (2p\omega_n^2 + 2p^2\zeta\omega_n)s + p^2\omega_n^2} \end{aligned}$$

Dado que nuestro sistema en bucle cerrado es un cuarto orden para el ajuste supondremos dos polos muy rápidos representados por  $p$ .

Igualando los coeficientes obtenemos:

$$K_D = \frac{\omega_n + 4\zeta\omega_n + p^2 + b}{a}$$

$$K_P = \frac{2p\zeta\omega_n^2 + 2p^2\zeta\omega_n + bc}{a}$$

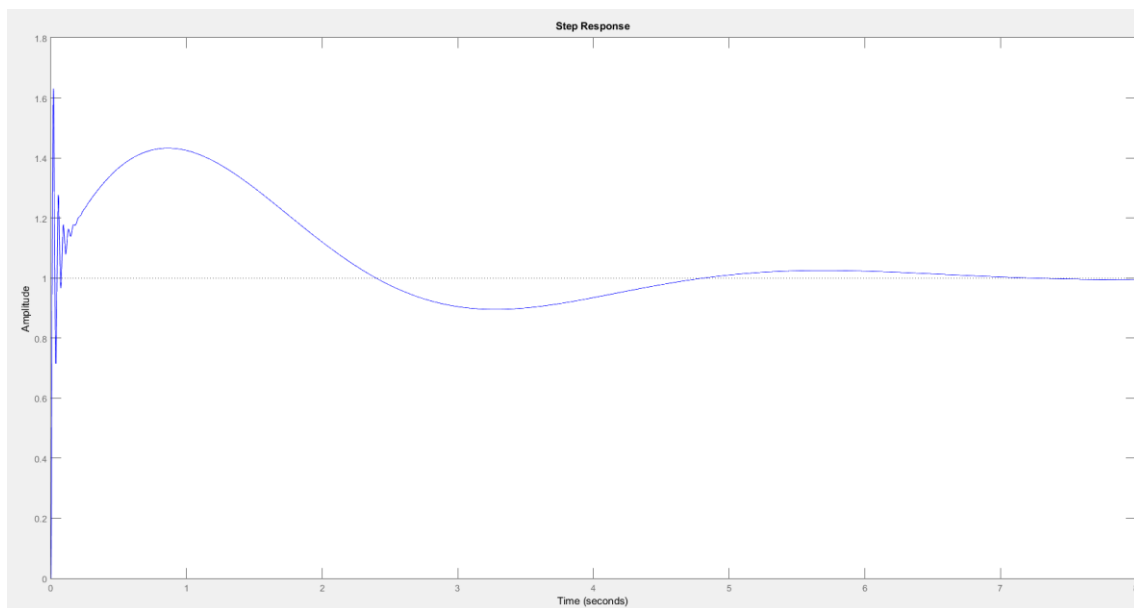
$$K_I = \frac{p^2\omega_n^2}{a}$$

Tomando  $p = 300$  como polos alejados y unos valores de  $\zeta = 0,8$  y  $\omega_n = 10$  para que no existan sobreoscilaciones:

$$K_D = 15.33 \sim 16$$

$$K_P = 230$$

$$K_I = 1384,61 \sim 1400$$

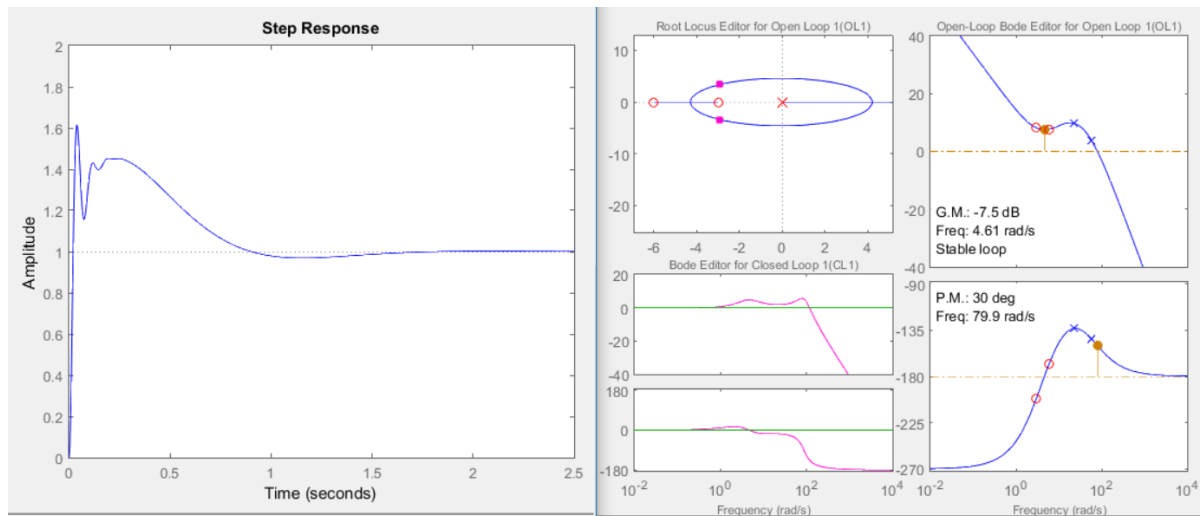


40. Respuesta al escalón de regulador PID calculado mediante imposición de polos

El regulador diseñado mediante imposición de polos es muy rígido y no permite realizar variaciones de forma intuitiva, con el fin de poder hacerlas y regular manualmente los parámetros del PID de manera independiente para la implementación final del mismo mediante PWM, introduciremos potenciómetros en las partes proporcional, integral y derivativa, diseñando a través de SISOTOOL mediante el lugar de las raíces el siguiente modelo:

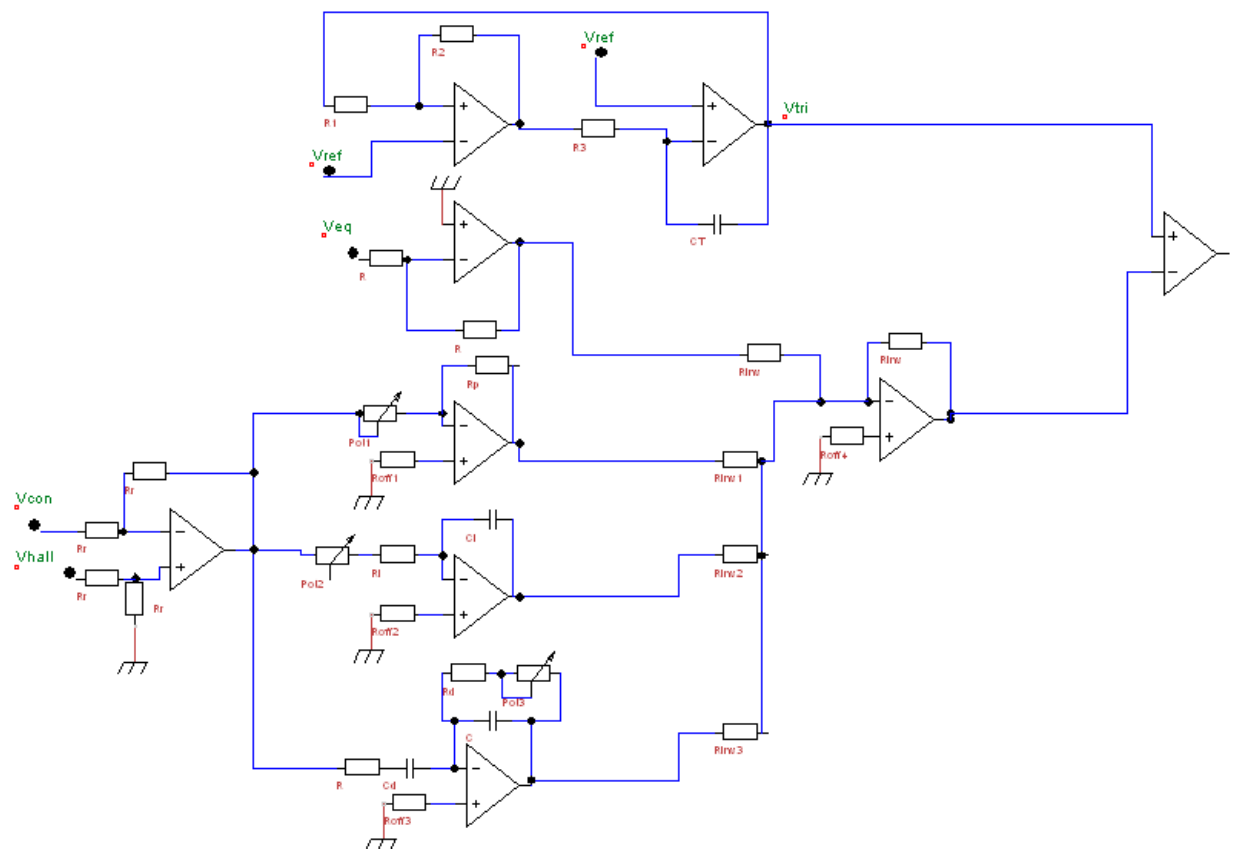


$$C(s) = 40 \cdot \frac{(1 + 0.17s)(1 + 0.33s)}{s}$$



41. Tiempo de respuesta, LDR y Bode del PID

Éste es el esquema completo del circuito a implementar:



42. Diseño completo del circuito controlador

Los valores de los componentes de la generación de onda triangular son exactamente los mismos a los calculados en el diseño del regulador adelanto de fase.

En cuando a los valores para el diseño del PID, éstos son los valores utilizados, en los que la ganancia en la parte proporcional y las constantes de tiempo de la parte derivativa e integral son variables por medio de un potenciómetro, considerando aproximadamente para el diseño un rango de 0.5-2 para poder ajustar los valores.

$$R(s) = 40 \cdot \frac{(1 + 0.17s)(1 + 0.33s)}{s} = 2.244 \frac{(s^2 + 8.91s + 17.82)}{s}$$

Resultado:

$$Kp \cdot (1 + \frac{1}{Ti \cdot s} + Td \cdot s) = 20(1 + \frac{2}{s} + 0.1122 \cdot s)$$

$$Kp + \frac{Ki}{s} + Kd \cdot s = 20 + \frac{40}{s} + 2.244 \cdot s$$

Ctes:

$$Kp = 20$$

$$ti = 0.025$$

$$\tau d = 2.244$$

Para la parte proporcional ajustaremos para un rango de ganancia de 10 a 40.

- Rpot1=10k  $\Omega$
- Rp=100k  $\Omega$

Para la parte integral consideraremos un rango de la constante de tiempo de 0.015 a 0.037.

- Rpot2=10k  $\Omega$
- Ri=6.8k  $\Omega$
- Ci=2.2Uf

Para la parte integral consideraremos un rango de la constante de tiempo de 0.68 a 4.08.

- Rpot3=50k  $\Omega$
- Rd=10k  $\Omega$
- Cd=68uF
- R=10k  $\Omega$
- C=0.68uF

Para los valores de las resistencias de la etapa sumadora y restadora se han elegido todas con un valor de 12k  $\Omega$  dado que no se intenta dar más peso a una señal que a otra.

En cuando a la descripción del circuito, consta al igual que en el diseño del adelanto de fase de dos partes diferenciadas. Un generador de onda triangular y un controlador, que en este caso es un PID. Las salidas de ambos se llevarán a un AO comparador que atacará directamente a la bobina a través de un transistor MOSFET.

A continuación explicaré más en profundidad el diseño y la implementación del circuito:

- Generador de onda triangular: Consta de dos amplificadores, siendo el primero un comparador de Schmitt con realimentación positiva que generará a su salida una onda cuadrada con amplitud igual a la alimentación del AO, que será de 0-5V. El segundo AO formará un circuito integrador que convertirá dicha onda cuadrada en una onda triangular.
- Controlador PID: El circuito comienza con una etapa restadora cuyas entradas son la referencia (3.47V) y la salida que ofrece el sensor Hall. La salida de esta etapa (error) se ramifica en tres etapas que corresponden a la parte proporcional, integral y derivativa (verticalmente en este orden), regulables independientemente por medio un potenciómetro. Al estar generadas las tres etapas mediante realimentación negativa se llevan las 3 partes y la acción necesaria para el equilibrio que corresponde a 2.05V (8.21V de alimentación de la bobina en equilibrio entre ganancia driver (4)), a un inversor con ganancia unitaria para recuperar el signo positivo de la señal. Todos los amplificadores de esta parte estarán alimentados a una tensión bipolar simétrica de  $\pm 12V$ .

## 5. Conclusiones y líneas futuras

### 5.1 Conclusiones

El objetivo principal de este proyecto ha sido la caracterización de la planta de un levitador magnético a partir de las ecuaciones que modelan su comportamiento así como la identificación experimental de los parámetros que intervienen para acabar diseñando un controlador que regule su funcionamiento dado su naturaleza inestable.

Durante la realización del trabajo se he llegado a las siguientes conclusiones:

- Se han obtenido las ecuaciones que caracterizan al sistema y a partir de ellas se ha definido la función de transferencia
- Se ha observado que los resultados obtenidos por medio del software de simulación FEMM se aproximan a los experimentales.
- Se ha comprobado experimentalmente que aunque una bobina ideal tiene solamente carácter inductivo, nuestra bobina real presenta además de la resistencia eléctrica propia del alambre conductor, un efecto capacitivo.
- Se ha comprobado que el aporte magnético por parte imán afecta significativamente a la posición de polos del sistema y por lo tanto en el diseño del controlador.

## 5.2 Líneas futuras

Existen algunas posibilidades de trabajos futuros a poder realizar aprovechando la realización de este proyecto. Algunas de las opciones serían:

- Mejora de la identificación de la planta con instrumentación más precisa. Las mejoras en el modelo de la planta permitirían rediseñar los controladores y mejorarlos.
- Diseño de distintos controladores mediante métodos diferentes a los utilizados en el proyecto.
- Estudio sobre la sensibilidad térmica del sistema que puede afectar a la fuerza magnética que aporta el electroimán.
- Estudio sobre la sensibilidad del sistema con objetos de distintos materiales, tamaños o pesos.
- Implementación del controlador mediante una placa de circuito impreso (PCB).
- Implementación digital del controlador a través de un microcontrolador.

## 6. Referencias

- [1] Katsuhiko Ogata, *"Ingeniería de control moderna"*, 5ª Edición.
- [2] José I. Artigas, Luís A. Barragán, Sergio Llorente, Álvaro Marco, Artículo *"Levitador magnético de muy bajo coste con fines didácticos"*, Universidad de Zaragoza, 2010.
- [3] Juan Carlos Milena Moreno, *"Control Lineal y No Lineal de un Levitador Magnético. Estudio Comparativo"*, Universitat Politècnica de Catalunya, 2010.
- [4] Walter Barie and John Chiasson, *"Linear and nonlinear state-space controllers for magnetic levitation"*, International Journal of Systems Science, 1996, volume 27, number 11, pages 1153-I 163.
- [5] <http://info.ee.surrey.ac.uk/Workshop/advice/coils/force.html>